



DS 1 - mardi 11 octobre 2022 - sujet A et B

Durée : 1h50

Calculatrice est autorisée

Nom : Prénom :

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 4	/ 3	/ 5	/ 8

Exercice 1.

4 points

Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaire, arrondis au dix millième près.

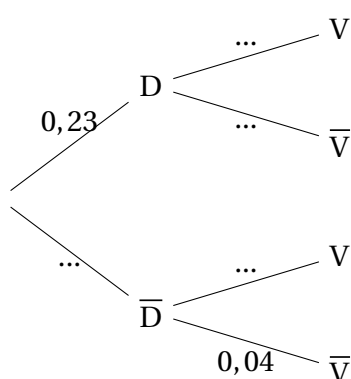
Un fabricant de batteries a constaté à l'issue de la fabrication, que ces batteries peuvent avoir un défaut de sulfatation. On admet que dans cette production, 23 % des batteries présentent ce défaut.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de qualité de ces batteries avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 90 % des batteries défectueuses, mais il élimine également à tort 4 % des batteries non défectueuses. Les batteries non éliminées sont alors mises en vente.

On prélève une batterie au hasard dans cette production et on note :

- D l'évènement « la batterie est défectueuse » ;
- V l'évènement « la batterie est mise en vente ».

1. Recopier et compléter l'arbre probabiliste modélisant la situation :



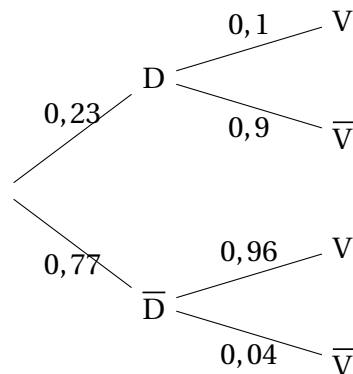
- 23 % des batteries sont défectueuses
d'où $p(D) = 0,23$ et $p(\bar{D}) = 1 - 0,23 = 0,77$
- Le contrôle détecte et élimine 90 % des batteries défectueuses
d'où $p_D(\bar{V}) = 0,9$ et $p_D(V) = 1 - 0,9 = 0,1$



- Le contrôle détecte et élimine à tort 4 % des batteries non défectueuses

d'où $p_{\bar{D}}(V) = 0,04$ et $p_{\bar{D}}(\bar{V}) = 1 - 0,04 = 0,96$

D'où l'arbre pondéré rendant compte de cette situation :



2. Calculer la probabilité que la batterie soit défectueuse et mise en vente.

On sait que $p(V \cap D) = p_D(V) \times p(D)$

Soit $p(V \cap D) = 0,23 \times 0,1 = 0,023$

Donc la probabilité qu'une batterie soit défectueuse et mise en vente est égale à 0,023

3. Montrer que la probabilité qu'une batterie soit mise en vente est égale à 0,7622.

Les événements D et V sont relatifs à la même épreuve, ils forment une partition

Alors d'après la formule des probabilités totales : $p(V) = p(V \cap D) + p(V \cap \bar{D})$

Or $p(V \cap \bar{D}) = p_{\bar{D}}(V) \times p(\bar{D})$

Soit $p(V \cap \bar{D}) = 0,77 \times 0,96 = 0,7392$

D'où $p(V) = p(V \cap D) + p(V \cap \bar{D}) = 0,023 + 0,7392 = 0,7622$

Donc la probabilité qu'une batterie soit mise en vente est égale à 0,7622

4. Quelle est la probabilité qu'une batterie mise en vente soit défectueuse ?

Il s'agit, de calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement D sachant que l'évènement V est réalisé. $p_V(D) = \frac{p(V \cap D)}{p(V)}$

Soit $p_V(D) = \frac{0,023}{0,7622} \approx 0,0302$

Donc arrondie au dix millièmes près, la probabilité qu'une batterie mise en vente soit défectueuse est 0,0302

**Exercice 2.**

3 points

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\frac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5$
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $e^{2x+3} \times e^{2-5x} \geq 1$

Correction

1. On doit résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\frac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5$

$$\text{Pour tout réel } x : \frac{e^{3x^2}}{e^{4x-1}} = e^5 \iff e^{3x^2-(4x-1)} = e^5$$

$$\iff e^{3x^2-4x+1} = e^5$$

$$\iff 3x^2 - 4x + 1 = 5$$

$$\iff 3x^2 - 4x + 1 - 5 = 0$$

$$\iff 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

Le discriminant du trinôme $3x^2 - 4x - 4 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 16 + 48 = 64$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{4 - 8}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{4 + 8}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2}{3}; 2 \right\}$

2. On doit résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $e^{2x+3} \times e^{2-5x} \geq 1$

$$\text{Pour tout réel } x : e^{2x+3} \times e^{2-5x} \geq 1 \iff e^{2x+3+2-5x} \geq 1$$

$$\iff e^{-3x+5} \geq e^0$$

$$\iff -3x + 5 \geq 0$$

$$\iff 5 \geq 3x$$

$$\iff \frac{5}{3} \geq x$$

Donc $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{5}{3} \right]$

**Exercice 3.**

5 points

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$.

1. Montrer que $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
2. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur \mathbb{R} . *On ne demande pas de calculer les ordonnées.*
3. Déterminer l'équation de la tangente \mathcal{T}_3 à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3.

Correction

1. On sait que $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$

Alors la fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$$\text{On a } f = u \times v \text{ et } f' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x^2 - 2x + 1 & \text{et } u'(x) = 2x - 2 \\ v(x) = e^{-2x+6} & \text{et } v'(x) = -2e^{-2x+6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f'(x) &= (2x - 2)e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1) \times (-2e^{-2x+6}) \\ &= (2x - 2 - 2(x^2 - 2x + 1))e^{-2x+6} \\ &= (2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2)e^{-2x+6} \\ &= (-2x^2 + 6x - 4) \times e^{-2x+6} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}}$$

2. On sait que pour étudier les variations de la fonction f , il faut étudier le signe de la dérivée $f'(x)$

$$\text{On a } f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$$

Or la fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de son facteur $-2x^2 + 6x - 4$.

Ce polynôme du second degré $(-2x^2 + 6x - 4)$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 36 - 32 = 4$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{4}}{-2 \times 2} = \frac{-6 - 2}{-2 \times 2} = \frac{-8}{-4} = 2$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{4}}{-2 \times 2} = \frac{-6 + 2}{-2 \times 2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le signe de ce polynôme sur \mathbb{R} et de la dérivée f'



x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$-2x^2+6x-4$	$-$	0	$+$	0	$-$
e^{-2x+6}	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit donc le tableau de variations

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
Variation de f				

3. On cherche \mathcal{T}_3 la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3.

On a $\mathcal{T}_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3)$

avec $f'(3) = (-2 \times 3^2 + 6 \times 3 - 4)e^{-2 \times 3 + 6} = (-2 \times 9 + 18 - 4)e^0 = -4$

et $f(3) = (3^2 - 2 \times 3 + 1)e^{-2 \times 3 + 6} = (9 - 6 + 1)e^0 = 4$

Alors $\mathcal{T}_3 : y = -4(x-3) + 4$

$$y = -4x + 12 + 4$$

Donc $\mathcal{T}_3 : y = -4x + 16$

**Exercice 4.**

8 points

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1 et u_2 . En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :  
    u=1000  
    for i in range(n) :  
        u=0.9*u+250  
    return u
```

3. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n .
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
(b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que : $u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$.
5. Déterminer une méthode permettant de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200. Il pourra s'agir d'un programme. Déterminer cette année.

Correction

1. Calculer u_1 et u_2 . En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

$$u_1 = 1000 - 0,1 \times 1000 + 250 = 1150 \text{ et } u_2 = 1150 - 0,1 \times 1150 + 250 = 1285$$

On a $u_2 - u_1 = 135 \neq u_1 - u_0 = 150$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.



2. La fonction Python nommée `suite` est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :
    u=1000
    for i in range(n) :
        u=0.9*u+250
    return u
```

La valeur renvoyée `suite(10)` représente le nombre estimé d'abonnés (à l'unité près) de l'influenceuse en 2030 (=2020+10).

On peut déterminer ainsi u_{10} c'est à dire l'estimation de ses abonnés en 2030

3. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$.

On pose pour tout entier naturel n la propriété \mathcal{P}_n : $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$

i. *Initialisation.* $u_0 \leq u_1 \leq 2500$ d'après la question 1, d'où \mathcal{P}_0 est vraie.

ii. *Hérédité.* Soit k un nombre entier naturel. On note suppose \mathcal{P}_k .

On a donc $u_k \leq u_{k+1} \leq 2500$

Comme $0,9 > 0$, on a $0,9u_k \leq 0,9u_{k+1} \leq 0,9 \times 2500$.

Enfin on obtient $0,9u_k + 250 \leq 0,9u_{k+1} + 250 \leq 0,9 \times 2500 + 250$.

Autrement dit $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2500$ qui n'est autre que \mathcal{P}_{k+1} .

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_k implique \mathcal{P}_{k+1} .

iii. *Conclusion.* Par initialisation et hérédité, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2500$

- (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2500$.

(u_n) étant croissante et majorée par 2500, D'après le théorème de convergence

on en déduit qu'elle converge vers un nombre inférieur ou égal à 2500



4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n .

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.

Soit n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= 0,9u_n + 250 - 2500 \\ &= 0,9(v_n + 2500) - 2250 \\ &= 0,9v_n + 0,9 \times 2500 - 2250 \\ &= 0,9v_n. \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 0,9v_n$

De plus son terme initial est $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1500$

(b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que : $u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$

Comme (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1500$ alors le terme général de (v_n) est $v_n = -1500 \times 0,9^n$

De plus $v_n = u_n - 2500$ d'où $u_n = v_n + 2500$

Alors pour tout entier naturel n , $u_n = v_n + 2500 = -1500 \times 0,9^n + 2500$

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500$

5. Déterminer une méthode permettant de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Il pourra s'agir d'un programme. Déterminer cette année.

Solution proposée : On écrit un programme qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geq 2200$.

Pour obtenir l'année, on ajoute 2020 à cet indice.

```
def seuil() :
    u=1000
    n=0
    while u <= 2200 :
        u=0.9*u+250
        n=n+1
    return n
```

L'exécution de `seuil()` renvoie 16.

On en déduit que le nombre d'abonnés dépassera 2200 en 2036